

10 POLÍGONS I CIRCUMFERÈNCIES

NOM: _____ CURS: _____ DATA: _____

L'essencial



FES-HO AIXÍ

1. CÀLCUL DE LA SUMA DELS ANGLES D'UN POLÍGON

Suma els angles interiors d'aquests polígons: a) Hexàgon regular b) Octàgon
Pots determinar la mida dels angles?

PRIMER. Determinem n , el nombre de costats del polígon.

a) $n = 6$ costats b) $n = 8$ costats

SEGON. Apliquem la fórmula $180^\circ \cdot (n - 2)$.

$$\begin{aligned} \text{a) Suma d'angles} &= 180^\circ \cdot (n - 2) = \\ &= 180^\circ \cdot (6 - 2) = 720^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Suma d'angles} &= 180^\circ \cdot (n - 2) = \\ &= 180^\circ \cdot (8 - 2) = 1.080^\circ \end{aligned}$$

TERCER.

- Si el polígon és regular, per saber quant fa cadascun dels angles dividim la suma entre el nombre de costats.

- Si no és regular, no ho podem determinar.

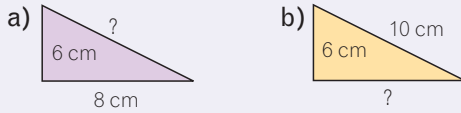
a) Un angle fa $= \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$

b) No ho podem determinar perquè no sabem si l'octàgon és regular.



2. Càlcul d'un dels costats del rectangle

Determina el costat que falta en aquests triangles rectangles.



PRIMER. Substituïm, en el teorema de Pitàgores, cada lletra pel seu valor. La lletra a representa la hipotenusa, i b i c , els catets.

$$a) \quad a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b=8, c=6} a^2 = 8^2 + 6^2$$

$$b) \quad a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=10, c=6} 10^2 = b^2 + 6^2$$

SEGON. Aillem la lletra desconeguda en l'equació resultant.

$$a) \quad a^2 = 8^2 + 6^2 \rightarrow a^2 = 100 \rightarrow a = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

$$b) \quad 10^2 = b^2 + 6^2 \rightarrow b^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \rightarrow b = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

3. Determinació de si un triangle és rectangle

Determina si el triangle els costats del qual fan 5, 12 i 13 cm, respectivament, és rectangle.

PRIMER. Assignem la mida més gran a la hipotenusa, i les altres dues, als catets.

$$a = 13 \quad b = 5 \quad c = 12$$

SEGON. Comprovem si es compleix el teorema de Pitàgores.

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=13, b=5, c=12} 13^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow 169 = 25 + 144 \rightarrow 169 = 169$$

TERCER.

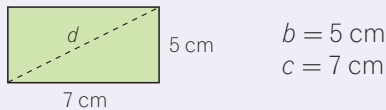
- Si es compleix el teorema de Pitàgores, el triangle és rectangle.
- En cas contrari, no és un triangle rectangle.

En aquest cas es compleix la igualtat; per tant, el triangle és rectangle.

4. Càlcul de la diagonal d'un quadrat o un rectangle

Calcula la diagonal d'un rectangle els costats del qual fan 5 cm i 7 cm.

PRIMER. La diagonal és la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets del qual són els costats de la figura.



SEGON. Apliquem el teorema de Pitàgores.

$$d^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b=5, c=7} d^2 = 5^2 + 7^2 = 74 \rightarrow d = \sqrt{74} \approx 8,6 \text{ cm}$$

La diagonal fa al voltant de 8,6 cm.

I ARA... PRACTICA

Càlcul de la suma dels angles d'un polígon

1. La suma dels angles interiors d'un dodecàgon és:

- a) 2.160° b) 1.800° c) 180° d) 216°

Càlcul d'un dels costats d'un triangle rectangle

2. La hipotenusa d'un triangle rectangle amb uns catets de 21 cm i 28 cm és:

- a) 7 cm b) 18,52 cm c) 35 cm d) 6,07 cm

Determinació de si un triangle és rectangle

3. Un triangle té dos costats que fan 15 cm i 12 cm. Per tal que sigui rectangle, el tercer costat ha de fer:

- a) 7 cm b) 8 cm c) 9 cm d) 10 cm

Càlcul de la diagonal d'un quadrat o un rectangle

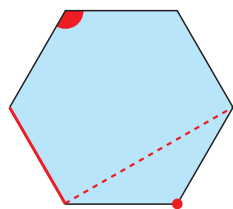
4. La diagonal d'un quadrat de 4 cm de costat fa:

- a) 4 cm b) 7,23 cm c) 9 cm d) 5,66 cm

Activitats

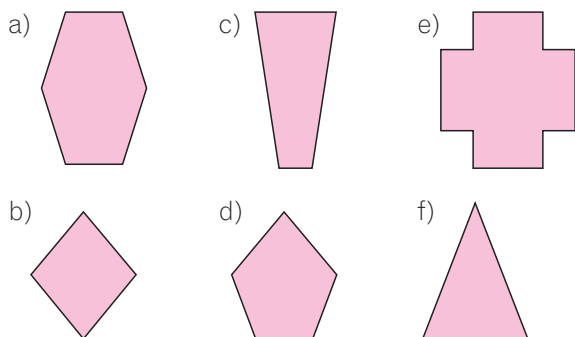
POLÍGONS

42. ● Indica el nom de cadascun dels elements del polígon.



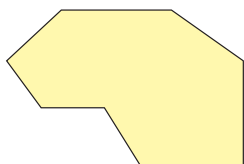
- Assenyalan els vèrtexs.
- Quants costats té?
- Quantes diagonals hi pots dibuixar?
- Quants angles té?
- Com se'n diu, d'aquest polígon?
- És regular? Per què?
- És còncau o convex?

43. ● Indica el nom d'aquests polígons segons el nombre de costats.



44. ● Dibuixa tres polígons que siguin convexas i tres que siguin còncaus.

45. ● Dibuixa la figura següent a la llibreta.



- Quants costats té?
- Pel nombre de costats, com se'n diu?
- Dibuixa'n les diagonals. Quantes en té?
- Assenyalan els angles. Quants en té?
- Calcula la suma dels angles interiors.
- Calcula el valor de cadascun d'aquests angles. Es pot fer?

46. ● Fes la suma dels angles interiors dels polígons següents.

- Heptàgon
- Decàgon
- Pentadecàgon
- Icosàgon

47. ●● Completa la taula. Tingues en compte que els polígons són regulars.

Nre. de costats	3	4	5	6	7
Suma d'angles		360°			
Angle interior		$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$			

- Quin és el polígon que té l'angle més petit?
- l el que té l'angle interior més gran?

FES-HO AIXÍ

COM DETERMINEM EL POLÍGON SI EN CONEIXEM LA SUMA DELS ANGLES?

48. Determina el polígon la suma dels angles del qual és 1.440°.

PRIMER. Apliquem la fórmula que dona la suma dels angles del polígon.

$$180 \cdot (n - 2) = 1.440$$

SEGON. Aillem n .

$$180 \cdot (n - 2) = 1.440 \rightarrow n - 2 = \frac{1.440}{180} \rightarrow n - 2 = 8$$

$$\rightarrow n = 8 + 2 = 10 \text{ costats}$$

El polígon la suma dels angles del qual és 1.440° és un decàgon.

49. ●● Troba el nombre de costats d'un polígon tots els angles del qual sumen:

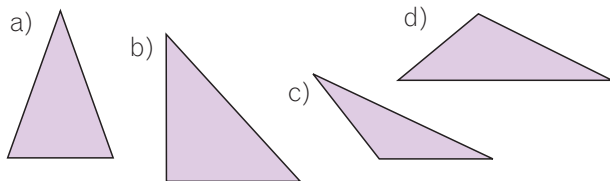
- 540°
- 360°
- 1.260°
- 1.980°

50. ●● Calcula la suma dels angles d'un polígon de 3, 4, 5 i 6 costats.

- Quina diferència hi ha entre la suma de cada polígon i la del polígon amb un costat menys?
- Si la suma dels angles d'un polígon de 15 costats és 2.340°, quina deu ser la suma d'un de 16 costats?

TRIANGLES

51. ● Classifica aquests triangles segons els costats i els angles.

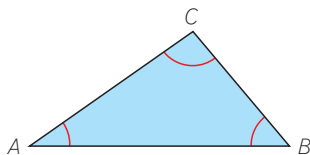


Determina el nombre d'angles aguts, rectes i obtusos que té cadascun.

52. ● En un triangle rectangle, un angle fa 45° . Quant fan els altres angles?

53. ● En un triangle rectangle, dos dels angles d'un triangle fan 20° i 70° , respectivament. Quant fa el tercer angle? Com en diem, del triangle?

54. ●● Quina mida té l'angle \hat{C} del triangle \widehat{ABC} si $\hat{A} = 35^\circ 32' 30''$ i $\hat{B} = 50^\circ 50'$?



55. ● Un triangle isòsceles té l'angle desigual de 50° . Quant fan els angles iguals?

FES-HO AIXÍ

COM DETERMINEM SI ES POT CONSTRUIR UN TRIANGLE AMB TRES SEGMENTS JA DONATS?

56. Podem dibuixar un triangle els costats del qual fan 5, 6 i 16 cm, respectivament?

PRIMER. Estudiem si qualsevol dels costats és més petit que la suma dels altres dos.

$$a = 5 \text{ cm} \quad b = 6 \text{ cm} \quad c = 16 \text{ cm}$$

$a < b + c$	$b < a + c$	$c < a + b$
$5 < 6 + 16$ $5 < 22$	$6 < 5 + 16$ $6 < 21$	$16 \not< 5 + 6$ $16 \not< 11$

SEGON.

- Si es compleixen les tres desigualtats, les mides determinen un triangle.
- En cas contrari, no podem construir un triangle amb aquests tres segments.

En aquest cas, no es compleix una desigualtat: ($16 \not< 5 + 6$); per tant, no existeix un triangle amb costats 5 cm, 6 cm i 16 cm.

57. ● Analitza en cada cas les mides i esbrina amb quines podem formar un triangle i amb quines no.

- a) $a = 8 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 1 \text{ cm}$
 b) $a = 6 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $c = 13 \text{ cm}$
 c) $a = 12 \text{ cm}$, $b = 14 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$

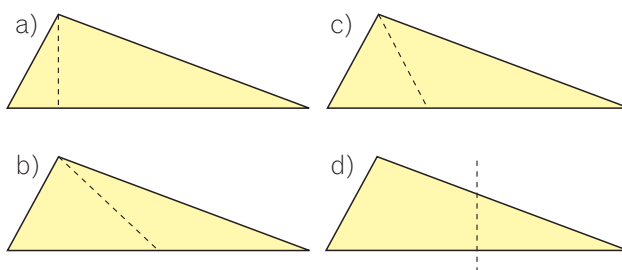
58. ●● L'angle exterior d'un triangle isòsceles, com el de la figura, fa $168^\circ 35'$. Calcula el valor dels tres angles del triangle.



59. ● Quin deu ser el valor dels angles d'un triangle equilàter?

60. ● Un triangle rectangle pot ser equilàter? Per què?

61. ● Escriu a la llibreta el nom de les rectes notables dibuixades en els triangles.



62. ●● Dibuixa tres triangles: un d'acutangle, un de rectangle i un d'obtusangle. Determina'n els circumcentres. Com són respecte a cadascun dels triangles?

63. ●● Dibuixa uns quants triangles rectangles i calcula'n l'ortocentre. Què hi observes?

TEOREMA DE PITÀGORES


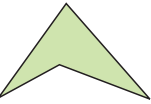

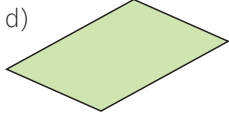


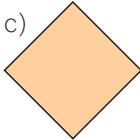

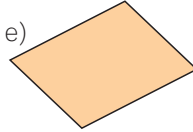
64. ● En un triangle rectangle, els catets fan 12 cm i 16 cm, respectivament. Calcula'n la hipotenusa.

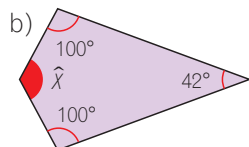
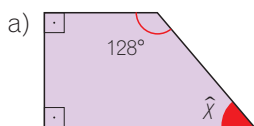
65. ● En un triangle rectangle, un catet fa 21 cm i la hipotenusa, 75 cm. Calcula'n l'altre catet.

66. ● En un triangle rectangle isòsceles, els catets fan 12 cm. Determina'n el valor de la hipotenusa.

67. ● En un triangle rectangle, els catets fan 25 cm i 60 cm, respectivament. Calcula'n la hipotenusa.
68. ● Digues si els triangles següents són rectangles o no. Si no ho són, calcula'n el valor de la hipotenusa per tal que ho siguin.
- Costats: 12, 16 i 20 cm
 - Costats: 5, 6 i 13 cm
 - Costats: 18, 24 i 32 cm
69. ● Calcula la diagonal d'un quadrat si saps que el costat fa 8 cm.
70. ● Determina el costat d'un quadrat la diagonal del qual fa 7 cm.
71. ●● Calcula l'altura d'un triangle equilàter el costat del qual fa 10 cm.

QUADRILÀTERS

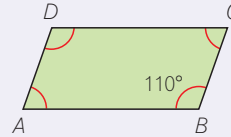
72. ● Dibuixa un quadrilàter i assenjala'n les diagonals, els vèrtexs, els angles i els costats.
73. ● Classifica els quadrilàters següents en funció del paral·lisme dels seus costats. Digues, a més, si són còncavs o convexos.
- 
 - 
 - 
 - 
74. ● Classifica aquests quadrilàters en funció dels angles i del paral·lisme dels costats.
- 
 - 
 - 
 - 
 - 
75. ● Calcula l'angle que falta en cadascun dels quadrilàters.



FES-HO AIXÍ

COM CALCULEM ELS ANGLES D'UN PARAL·LELOGRAM?

76. Calcula el valor de tots els angles d'aquest paral·lelogram.



PRIMER. Els angles contigus són suplementaris.

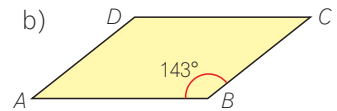
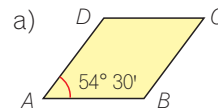
$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

SEGON. Els angles oposats són iguals.

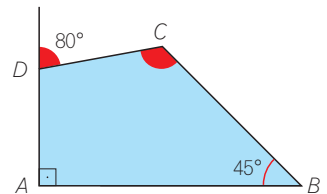
$$\hat{D} = \hat{B} = 110^\circ$$

$$\hat{C} = \hat{A} = 70^\circ$$

77. ●● Calcula els angles de cada paral·lelogram.



78. ● Un dels angles d'un rombe té 35°. Digues quin és el valor de la resta d'angles.
79. ●● Un trapezi isòsceles té dos angles de 45°. Quant fan els altres angles?
80. ●● Calcula el valor de l'angle \hat{C} del quadrilàter.



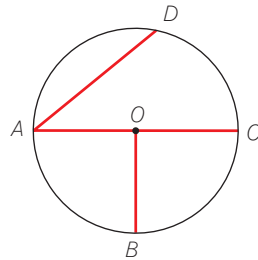
81. ●● Digues si les afirmacions són certes o falses.

- Si un paral·lelogram té un angle recte, tots els seus angles són rectes.
- Si un quadrilàter té un angle recte, té almenys un altre angle recte.
- Si un quadrilàter té dues diagonals iguals, és un paral·lelogram.
- Hi ha quadrilàters que no són paral·lelograms i que tenen les diagonals iguals.
- Un quadrilàter que no sigui paral·lelogram pot tenir dos angles rectes.
- Un quadrilàter que no sigui paral·lelogram pot tenir tres angles rectes.

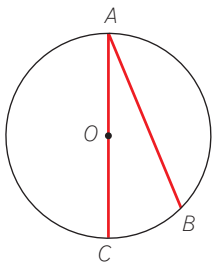
CIRCUMFERÈNCIES

82. ● Dibuixa una circumferència amb un compàs. Després, traça una corda i assenjala amb colors diferents els dos arcs que determina.
83. ● Dibuixa una circumferència de radi 4 cm, i assenjala-hi un radi, un diàmetre i una corda.

84. ● A la circumferència de la figura, s'hi han traçat diversos segments. Indica el nom de cadascun.



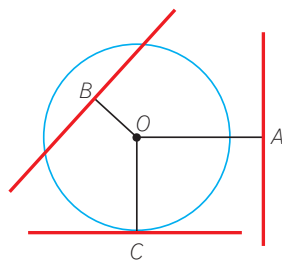
85. ● Fixa't en la circumferència de la figura. Completa i respon.



- a) El segments AB és una...
- b) El segment AC és un...
- c) Si els segments tallen dos punts de la circumferència, per què no reben el mateix nom?

86. ● Dibuixa una circumferència i assenjala-hi dos punts interiors en vermell, tres punts de la circumferència en verd i quatre punts exteriors a la circumferència en blau.
87. ● Fes una circumferència i assenjala-hi una recta secant que no passi pel centre en vermell, una recta exterior en verd i dues rectes tangents a la circumferència en blau.

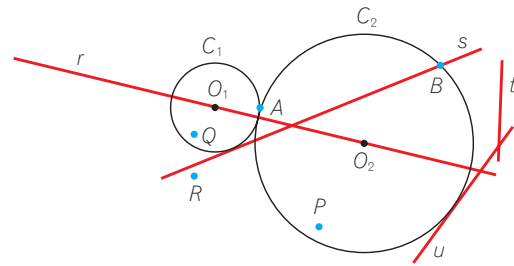
88. ● A la circumferència següent, s'hi han traçat una recta exterior, una altra recta secant i una altra de tangent. També s'hi han dibuixat els segments perpendiculars a les rectes indicades des del centre, O , de la circumferència.



Compara els segments OA , OB i OC amb el radi, r , i escriu el signe $<$, $>$ o $=$, en funció del que correspongui.

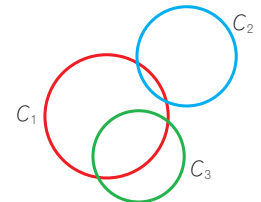
- a) $OA \square r$ b) $OB \square r$ c) $OC \square r$

89. ● Fixa't en aquesta figura i completa la taula.



Element 1	Element 2	Posició relativa
P	C_1	
P	C_2	
A	C_1	
A	C_2	
Q	C_1	
Q	C_2	
R	C_1	
R	C_2	
B	C_1	
B	C_2	
r	C_1	
r	C_2	
s	C_1	
s	C_2	
t	C_1	
t	C_2	
u	C_1	
u	C_2	
C_1	C_2	

90. ●● Fixa't en la figura i assenjala la posició relativa de les tres circumferències entre elles.



91. ●● Si la distància del punt P a la recta r és 3 cm, com podries traçar una circumferència de centre P que fos tangent a la recta r ? Quin seria el valor del radi?

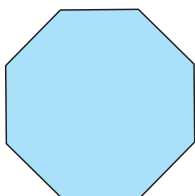


POLÍGONS REGULARS I INSCRITS

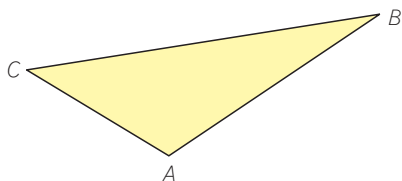
92. ● En un dodecàgon regular, esbrina:
- La mida de l'angle central corresponent a dos radis consecutius.
 - La suma de tots els angles.
 - La mida de cadascun dels angles interiors.
93. ● Calcula el valor de l'angle central de:
- Un icosaègon regular.
 - Un pentadecàgon regular.
94. ●● Calcula el nombre de costats d'un polígon regular amb aquest angle central.
- 36°
 - $27^\circ 41' 32,3''$
95. ● Dibuixa una circumferència de 5 cm de radi, i inscriu-hi un polígon de cinc costats. Quant sumen els angles?
96. ●● Calca el quadrat de la figura. Traça-hi una circumferència circumscrita.



- Com fas la circumferència?
 - Quina relació hi ha entre el radi de la circumferència i el costat del quadrat?
97. ●● Calcula el centre del polígon regular següent i explica com ho fas.



98. ●● Pots dibuixar la circumferència circumscrita a aquest angle? Indica'n el procés.



PROBLEMES AMB POLÍGONS

FES-HO AIXÍ

COM RESOLEM PROBLEMES AMB EL TEOREMA DE PITÀGORES?

99. Calcula la longitud d'una escala si està recolzada a la paret a una distància d'1,8 m i puja fins a una altura de 7 m.



PRIMER. Fem un gràfic per aclarir la situació.

Si considerem que l'angle que formen la paret i el terra és un angle recte, serà un triangle rectangle, i en coneixerem dos dels catets.

SEGON. Apliquem el teorema de Pitàgores.

$$c^2 = (1,8)^2 + 7^2 = 52,24$$

$$c = \sqrt{52,24} = 7,23 \text{ m}$$

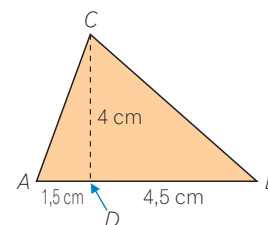
L'escala fa 7,23 m.

100. ●● Una escala de 5 m recolzada a la paret té el peu a 1,5 m de la base de la paret. A quina altura arriba l'escala?
101. ● Calcula la longitud de la diagonal d'una parcel·la rectangular d'un terreny si les dimensions són 150 m i 60 m, respectivament.
102. ●● En un jardí rectangular de 8×5 m, determina quants metres recorre un nen que el travessa seguint-ne la diagonal.

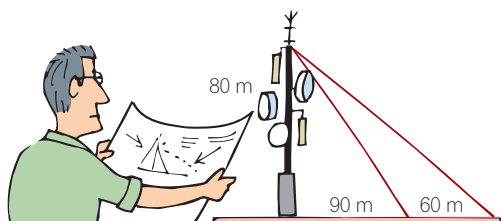


103. ●● Calcula l'altura d'un triangle isòsceles amb dos costats iguals de 12 cm i un costat desigual de 16 cm.

104. ●● Calcula la dimensió de tots els costats d'un triangle com el d'aquesta figura.



105. ●●● Un arquitecte vol col·locar dos cables per subjectar una torre de comunicacions. Fixa't en la figura i calcula la longitud dels cables.

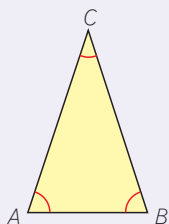


106. ●●● La Lluïsa vol fer passar per una porta de 2 m d'altura i 1 m d'amplària un tauler de fusta de més de 2 m de longitud. No el pot passar dret, sinó que ho ha de fer inclinant-lo. Quina és la longitud màxima que pot tenir el tauler per poder-ho fer?

FES-HO AIXÍ

COM RESOLEM PROBLEMES GEOMÈTRICS AMB EQUACIONS?

107. L'angle desigual d'un triangle isòsceles és la meitat de cadascun dels altres dos. Calcula el valor dels tres angles del triangle.



PRIMER. Definim la incògnita.

Si anomenem x la mida dels angles iguals,

$\frac{x}{2}$ serà la mida de l'angle desigual.

SEGON. Plantegem l'equació.

$$x + x + \frac{x}{2} = 180^\circ$$

TERCER. Resolem l'equació.

$$x + x + \frac{x}{2} = 180 \rightarrow 2x + \frac{x}{2} = 180$$

i n'eliminem denominadors:

$$4x + x = 360 \rightarrow 5x = 360 \rightarrow x = 72$$

Per tant, els angles iguals faran 72° cadascun,

i el desigual, $\frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

QUART. Comprovem la solució.

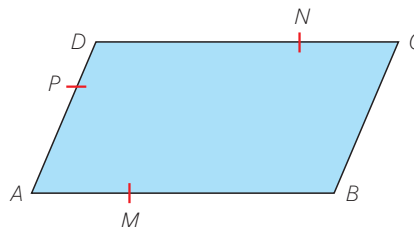
$$72^\circ + 72^\circ + 36^\circ = 180^\circ$$

108. ●● En un triangle rectangle un dels costats aguts és el triple que l'altre. Calcula el valor dels angles d'aquest triangle.

109. ●●● Dels tres angles d'un triangle, el més gran és el triple que el mitjà, i aquest és el doble que el més petit. Calcula el valor dels angles.

INVESTIGA

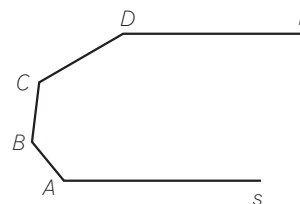
110. ●●● En el paral·lelogram $ABCD$, $DN = BM$. Assenjala un punt Q al costat BC de manera que $MPNQ$ sigui un altre paral·lelogram. Explica com ho fas.



111. ●●● Hi pot haver un polígon de 3, 4, 5, 6... costats, amb tots els angles iguals, però que no tingui els costats iguals?

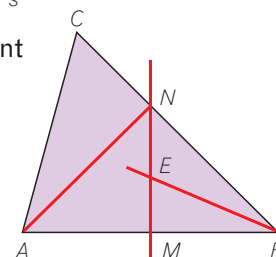
- Dibuixa els polígons que compleixen aquesta condició.
- Explica en quins casos no és possible i per què.

112. ●●● En el dibuix següent, les rectes r i s són paral·leles. Calcula quant val la suma dels angles $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}$.

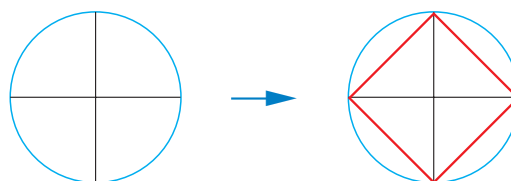


113. ●●● A la figura, M és el punt mitjà del costat AB .

La mediatriu de AB talla BC en N , i la bisectriu de l'angle \hat{B} talla MN en E . Quin punt notable és E en el triangle ABN ?



114. ●●● Per fer un quadrat, has de traçar una circumferència i dibuixar-hi dos diàmetres perpendiculars. Uneix els extrems dels diàmetres i obtindràs el quadrat.



Com faries un octàgon regular?

A la vida quotidiana

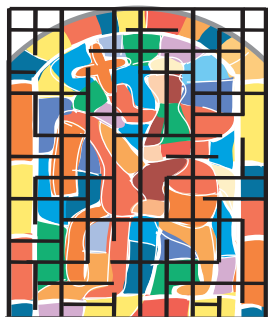
115. ●●● L'església de Vilagran té un vitrall enorme, quadrat i acabat en un arc. Es va construir en el segle XVIII i té un gran valor artístic.

En els últims temps s'ha deteriorat a causa de les inclemències del temps i, sobretot, de l'elevat nombre de coloms que fan niu al voltant de l'església.

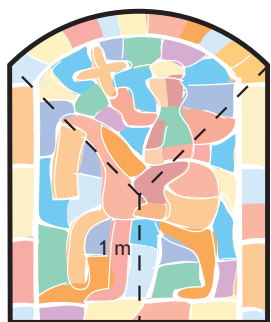


L'ajuntament de la localitat ha decidit protegir-lo amb una malla metàl·lica que impedeixi els coloms d'accedir-hi.

Com que la malla metàl·lica és gairebé imperceptible des de l'exterior, s'ha decidit que sigui de forma rectangular i que tapi completament el vitrall.



Ara, amb l'ajuda d'aquest esquema del vitrall, han de calcular les dimensions de la malla.



Quines dimensions ha de tenir la malla metàl·lica?

116. ●●● Les dimensions d'un televisior les indica la longitud de la seva diagonal, que expressem en polzades, i la relació que hi ha entre els costats. Així doncs, en un televisior de 21 polzades amb format 9:16:

- La diagonal de la pantalla fa 21 polzades, tenint en compte que cada polzada són 2,54 cm.
- Per cada 9 cm que la pantalla faci d'altura, en té 16 de llargària.



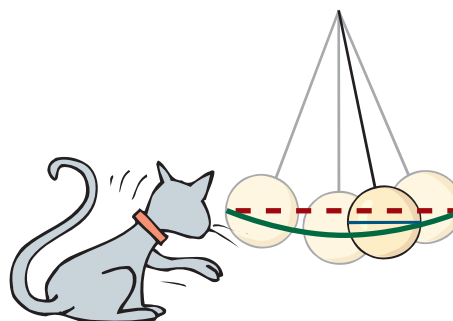
Quines dimensions, expressades en centímetres, té la pantalla d'un televisior amb aquestes característiques?

117. ●●● La fàbrica de rellotges CASCAVELL és famosa per la perfecció dels seus rellotges de pèndol.

El seu model més cotitzat és el Pendill, que consta d'una vareta recta de 30 cm a l'extrem de la qual penja un cercle de 4 cm de diàmetre. Aquest pèndol, quan oscil·la, descriu un angle de fins a 30° .



La fàbrica ha rebut la comanda d'un client que vol un rellotge com l'anterior, però amb una vareta de 50 cm.



Quina ha de ser l'amplària mínima de la caixa del rellotge?